TD : Profil vertical de température à une ligne de partage et en état stationnaire

d'après Robin, G. d. Q. (1955), 'Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice sheets', J. Glaciol. 2, 523-532.

1 Contexte et notations

On considère une ligne de partage d'une calotte polaire en état stationnaire. Le temps est représenté par t. On écrit les équations dans la coordonnée verticale z et on prend $z = 0$ au niveau du socle. Soit h l'épaisseur totale de glace. Soit $w(z)$ la vitesse verticale. On suppose de plus que la neige se densifie instantanément et on note a l'accumulation en surface. Soit $T(z)$ la température de la glace, $T_B = T(z = 0)$ et $T_S = T(z = h)$. La base est supposée froide et donc la fusion basale est supposée nulle. La chaleur générée par la déformation est traitée comme un flux à la base de la calotte, hypothèse raisonable puisque la majeur partie du cisaillement intervient près de la base. Le flux de déformation sera donc implicitement compris par la suite dans le flux géothermique. Le coefficient de conductivé thermique K et la capacité thermique c sont supposés constants sur toute l'épaisseur (et donc le coefficient de diffusivité thermique k). Les conditions aux limites sont données par : $T = T_S$ en surface ($z = h$) et flux de chaleur égal à G (flux géothermique) à la base ($z = 0$).

2 Calcul du profil de température

Question 1 : Ecrire l'équation de la chaleur.

Question 2 : Intégrer cette équation pour obtenir une expression de $\frac{dT}{dz}$.

On suppose maintenant que la vitesse verticale est donnée par :

$$w = -\frac{az}{h}.$$

Ce profil correspond à une déformation localisée essentiellement à la base de la calotte (ou glissement pur), que l'on nomme "plug flow" en anglais.

Question 3 : Calculer $\int_0^z w dz$. On l'exprimera à l'aide du paramètre $l^2 = 2kh/a$. En déduire une expression de $\frac{dT}{dz}$.

Question 4 : Intégrer à nouveau le résultat précédent pour obtenir une expression de $T(z) - T_B$.

Question 5 : Ecrire maintenant $T(z) - T_S$ à l'aide de la fonction $erf(z)$ définie par :

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy.$$

On définit maintenant les variables :

$$\zeta = \frac{z}{h},$$

$$\theta = \frac{k(T - T_S)}{Gh},$$

$$\gamma = \frac{ah}{k}.$$

Question 6 : Ecrire θ en fonction de ζ et γ.

Question 7 : Tracer θ en fonction de ζ pour différentes valeurs de γ : 0, 0.5, 1, 3, 5, 10, 20, 30.