Corrigé du TD : Profil vertical de température à une ligne de partage et en état stationnaire

d'après l'article : Robin, G. d. Q. (1955), 'Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice sheets', J. Glaciol. 2, 523-532.

<u>Réponse 1 :</u> L'équation de la chaleur se résume à :

$$k\frac{d^2T}{dz^2} - w\frac{dT}{dz} = 0. \tag{1}$$

<u>Réponse 2 :</u> On peut écrire :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)^{-1} \frac{d^2T}{dz^2} = \frac{w}{k},$$

ce qui s'intègre en :

$$\left[\ln\left(\frac{dT}{dz}\right)\right]_0^z = \frac{1}{k}\int_0^z wdz,$$

En exprimant le gradient de température à la base :

$$\left.\frac{dT}{dz}\right|_{z=0} = -\frac{G}{k},$$

on obtient :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{G}{k}\exp\left(\frac{1}{k}\int_0^z wdz\right).$$

Réponse 3 : L'intégration de la vitesse verticale est :

$$\int_0^z w dz = -k\frac{z^2}{l^2}.$$

On en déduit $T(z) - T_B$:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{G}{k}\exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right).$$

Réponse 4 : En intégrant le résultat de la réponse précédente, on obtient :

$$T(z) - T_B = -\frac{G}{k}\int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right) dz,$$

Réponse 5 : A l'aide du changement de variables $y = z/l$, on peut écrire le résultat précédent sous la forme :

$$T(z) = T_B - \frac{G}{k}\frac{\sqrt{\pi}}{2}l\ erf(z/l).$$

Ainsi T_S peut s'écrire :

$$T_S = T_B - \frac{G}{k}\frac{\sqrt{\pi}}{2}l\ erf(h/l).$$

En soustrayant les deux expressions précédentes, on obtient :

$$T(z) - T_S = -\frac{G}{k}\frac{\sqrt{\pi}}{2}l\ \left[erf(z/l) - erf(h/l)\right].$$

Réponse 6 : Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\frac{k(T - T_S)}{Gh} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{l}{h}\ \left[erf(\zeta h/l) - erf(h/l)\right].$$

Or :

$$\frac{l}{h} = \sqrt{\frac{2k}{ah}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}},$$

d'où :

$$\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \left[erf(\zeta\sqrt{\gamma/2}) - erf(\sqrt{\gamma/2}) \right].$$

<u>Réponse 7 :</u> Figure extraite de Paterson (1994) :