

Corrigé du TD : Profil vertical de température à une  
ligne de partage et en état stationnaire

9th January 2008

d'après l'article : Robin, G. d. Q. (1955), 'Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice sheets', *J. Glaciol.* **2**, 523-532.

Réponse 1 : L'équation de la chaleur se résume à :

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} - w \frac{dT}{dz} = 0. \quad (1)$$

Réponse 2 : On peut écrire :

$$\left( \frac{dT}{dz} \right)^{-1} \frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{w}{k},$$

ce qui s'intègre en :

$$\left[ \ln \left( \frac{dT}{dz} \right) \right]_0^z = \frac{1}{k} \int_0^z w dz,$$

En exprimant le gradient de température à la base :

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{G}{k},$$

on obtient :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{G}{k} \exp\left(\frac{1}{k} \int_0^z w dz\right).$$

**Réponse 3 :** L'intégration de la vitesse verticale est :

$$\int_0^z w dz = -k \frac{z^2}{l^2}.$$

On en déduit  $T(z) - T_B$  :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{G}{k} \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right).$$

**Réponse 4 :** En intégrant le résultat de la réponse précédente, on obtient :

$$T(z) - T_B = -\frac{G}{k} \int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{l^2}\right) dz,$$

**Réponse 5 :** A l'aide du changement de variables  $y = z/l$ , on peut écrire le résultat précédent sous la forme :

$$T(z) = T_B - \frac{G \sqrt{\pi}}{k} l \operatorname{erf}(z/l).$$

Ainsi  $T_S$  peut s'écrire :

$$T_S = T_B - \frac{G \sqrt{\pi}}{k} l \operatorname{erf}(h/l).$$

En soustrayant les deux expressions précédentes, on obtient :

$$T(z) - T_S = -\frac{G \sqrt{\pi}}{k} l [\operatorname{erf}(z/l) - \operatorname{erf}(h/l)].$$

**Réponse 6 :** Le résultat précédent peut s'écrire :

$$\frac{k(T - T_S)}{Gh} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{l}{h} [\operatorname{erf}(\zeta h/l) - \operatorname{erf}(h/l)].$$

Or :

$$\frac{l}{h} = \sqrt{\frac{2k}{ah}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}},$$

d'où :

$$\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma}} \left[ \operatorname{erf}(\zeta\sqrt{\gamma/2}) - \operatorname{erf}(\sqrt{\gamma/2}) \right].$$

**Réponse 7 :** Figure extraite de Paterson (1994) :

