

TD : incompressibilité de la glace et champ de vitesse le long d'une ligne d'écoulement d'une calotte polaire

d'après Parrenin, F. & Hindmarsh, R. (2007), 'Influence of a non-uniform velocity field on isochrone geometry along a steady flowline of an ice sheet', J. Glaciol. 53(183), 612-622.

1 Contexte et notations

On considère une ligne d'écoulement d'une calotte polaire. Le temps est représenté par t . On écrit les équations dans les coordonnées (x, z) , où x est la distance horizontale depuis la ligne de partage. On suppose que la direction horizontale de l'écoulement ne dépend pas de la position verticale et du temps et on représente par $Y(x)$ la largeur du tube d'écoulement.

La géométrie de la calotte est donnée par $B(x, t)$, l'altitude du socle, $S(x, t)$, l'altitude de la surface et $H(x, t) = S(x, t) - B(x, t)$ l'épaisseur totale de glace. On suppose de plus que la neige se densifie instantanément et on note $a(x, t)$ et $m(x, t)$ l'accumulation en surface et la fusion à la base du glacier. Soit alors $u_x(x, z, t)$ la vitesse horizontale de la glace, $u_z(x, z, t)$ sa vitesse verticale et $\chi(x, z, t)$ son âge.

Nous définissons maintenant plusieurs flux qui seront utilisés par la suite. Le *flux horizontal partiel* $q_H(x, z, t)$ est défini comme le flux horizontal passant sous l'altitude z :

$$q_H(x, z, t) = Y(x) \int_B^z u_x(x, z', t) dz'. \quad (1)$$

avec $Q_H(x, t) = q_H(x, S, t)$ le *flux horizontal total* à la position x et au temps t . Nous

définissons de plus le *flux basal de fusion* $Q_m(x, t)$ par:

$$Q_m(x, t) = \int_0^x Y(x')m(x', t)dx', \quad (2)$$

et le *flux basal d'élévation* par :

$$Q_B(x, t) = - \int_0^x Y(x')\frac{\partial B}{\partial t}(x', t)dx'. \quad (3)$$

2 La fonction de courant

Note : par simplicité, les dépendances des fonctions aux coordonnées spatiales et temporelles seront parfois omises dans la suite.

Il est connu de la théorie de la mécanique des fluides qu'un écoulement plan avec une densité ρ peut être représenté par la fonction de courant ψ . La fonction de courant a une signification physique intuitive. En effet, le flux à travers n'importe quelle courbe reliant 2 points A et B est indépendante de la courbe choisie et est donnée par la différence $\psi_B - \psi_A$. Un corollaire de cette propriété est que le long d'une ligne de courant, ψ est constante.

On peut étendre cette idée à une ligne d'écoulement de largeur variable. En effet, la largeur du tube d'écoulement peut être assimilé $Y(x)$ à une densité, changeant en espace mais pas en temps. Notre écoulement dérive donc en principe d'une fonction de courant q et le but de ce qui suit est d'en déterminer une expression. Par définition, q vérifie :

$$Y u_x = \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (4)$$

$$Y u_z = -\frac{\partial q}{\partial x}. \quad (5)$$

Question 1 : Ecrire $Y u_x$ en fonction du flux horizontal partiel q_H .

Question 2 : A partir du schéma 2, écrire la conservation sur le domaine délimité par: 1) 2 lignes verticales à x et $x + dx$; 2) le socle rocheux; 3) une surface horizontale à l'altitude z ; 4) les parois latérales du tube d'écoulement.

Question 3 : En prenant la limite $dx \rightarrow 0$, en déduire une expression de $Y u_z$.

Question 4 : En déduire une expression de la fonction de courant q .

3 Le système de coordonnées (x, Ω)

On définit le *flux total* à la position x et au temps t par $Q(x, t) = q(x, S, t)$.

Question 5 : Ecrire la conservation de la masse sur une colonne entière de glace.

A part à la ligne de partage où $Q(x, t) = 0$, on définit la *fonction de courant normalisée* $\Omega(x, z, t)$ telle que :

$$q(x, z, t) = Q(x, t)\Omega(x, z, t). \quad (6)$$

On définit également la *fonction de forme du flux horizontal* $\omega(x, z, t)$ par :

$$q_H(x, z, t) = Q_H(x, t)\omega(x, z, t). \quad (7)$$

et le ratio μ entre le flux basal et le flux horizontal :

$$\mu(x, t) = \frac{Q_m(x, t) + Q_B(x, t)}{Q_H(x, t)}. \quad (8)$$

Question 6 : Ecrire une relation entre Ω , ω et μ .

Question 7 : A partir de (4) et (6), écrire u_x en fonction de Q , Y et Ω .

Question 8 : A partir de (5) et de la réponse à la question 5), écrire u_x en fonction de Q , Y , Ω , a et S .

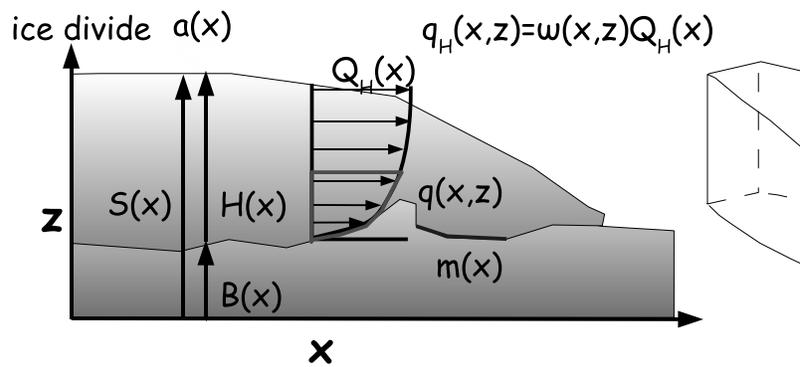


Figure 1: Schéma illustrant la ligne d'écoulement et les principales notations utilisées.

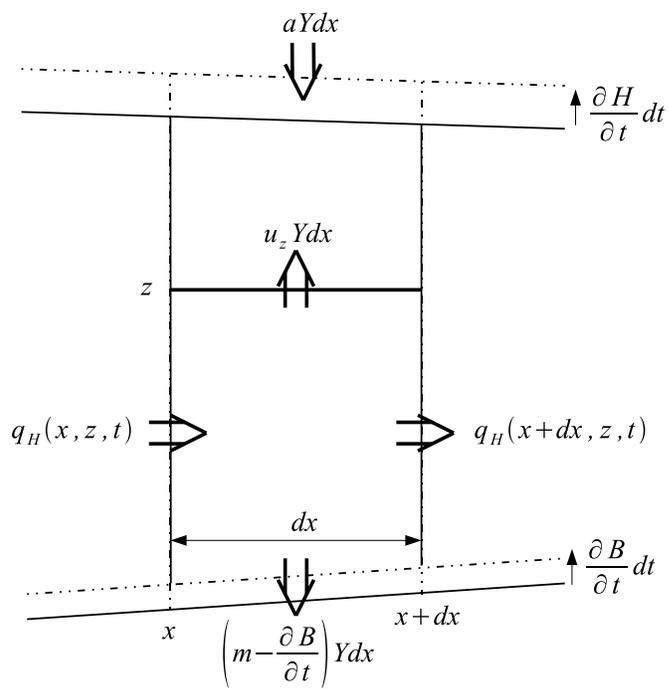


Figure 2: Schéma illustrant la conservation de la masse sur une colonne de glace tronquée à l'altitude z .